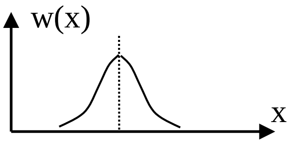
Fehlerarten

1. Zufälliger Fehler – treten statistisch verteilt um einen Mittelwert auf
   → Normalverteilung

   Beispiele: Ableseunsicherheit ± ½ Skt.
   Erschütterungen
   Lagerkräfte (nur bei mech. Messgeräten)



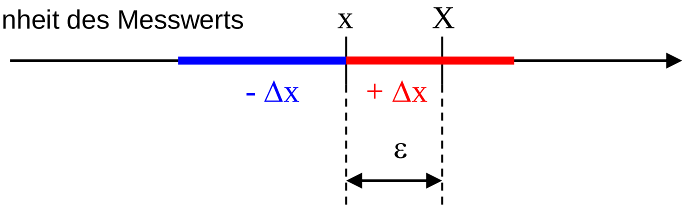
2. Systematische Fehler
   - treten unter gleichen Bedingungen mit gleichem Betrag und Vorzeichen auf
   - sind die Bedingungen bekannt, kann man diese Fehler aus den Messwerten herausrechnen.

   Beispiele: Reibungsfehler
   Innenwiderstandsfehler
   Eichfehler der Messgeräte ± ½ Skt.

Fehlerangabe

1. Wahrer Fehler ε
   - Abweichung des Messwertes x vom wahren Wert X: $\varepsilon = x - X$
   - meist unbekannt, da der wahre Wert X unbekannt ist

2. Absoluter Fehler Δx
   - Intervall um Messwert x , welches den wahren Wert X mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P enthält: $X = x \pm \Delta x$
   - wenn Δx Größtfehler → P = 100%
   - besitzt die Einheit des Messwerts



3. Messunsicherheit Δx_g: - auch Größtfehler $\Delta x_g = \sum |\Delta x_{syst}| + \sum |\Delta x_{zuf}|$

3. Relativer Fehler
   - Verhältnis aus Absolutfehler Δx und wahrem Wert X
   - da X meist nicht bekannt: $\dfrac{\Delta x}{X} \approx \dfrac{\Delta x}{x}$ (für kleine ε
   - einheitenlos

4. Prozentualer Fehler
   - Angabe des Relativfehlers in Prozent: $\dfrac{\Delta x}{x}\,100\%$
   - für Vergleiche am besten geeignet

Fehlerfortpflanzung

1. Bei Fehlern von Summen und Differenzen werden die Beträge der absoluten Fehler addiert:

$$f = ax + by - z \quad \rightarrow \quad \Delta f = |a|\Delta x + |b|\Delta y + \Delta z$$

2. Bei Fehlern von Produkten und Quotienten werden die Beträge der relativen Fehler addiert:

$$f = a\frac{x\,y}{z} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

3. Bei Fehlern von Potenzen wird der relative Fehler mit dem Betrag des Exponenten multipliziert:

$$f = a\frac{x^n}{y^m} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |n|\frac{\Delta x}{x} + |m|\frac{\Delta y}{y}$$

4. Fehler allgemein (totales Differential): $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$

Zufälliger Fehler in Messreihen

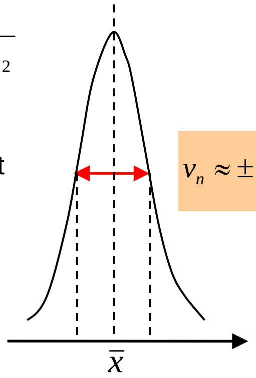
1. Arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. Standardabweichung σ_{n-1}: - mittlerer Fehler der Einzelmessung
   - **Stichproben**standardabweichung
   - empirische Standardabweichung
   - auch s_x oder s

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

3. Standardabweichung σ_n: - alle Elemente einer endlichen Grundgesamtheit werden erfasst
   - **Populations**standardabweichung
   - auch σ_x

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$



$v_n \approx \pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

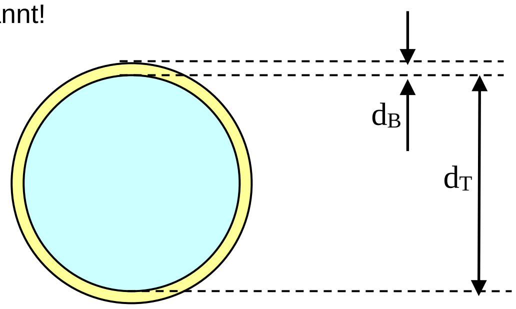
4. Vertrauensbereich v_n: - enthält den wahren Wert mit einer statistischen Sicherheit von 68,3%
   - Wendepunktabstand

n>10: $X \approx \bar{x} \pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$

5. Streubreite R: - Variationsbreite $R = x_{max} - x_{min}$

Beispiel 1

Messen des Umfang eines Topfes mit 200,00mm Durchmesser (Herstellerangabe)
durch Einfachmessung - π ist noch nicht bekannt!
Messgerät - Textilbandmaß mit mm-Teilung



→ Eichfehler ± ½ mm (systematisch)
$\Delta u_E = \pm ½$ mm
→ Ablesefehler ± ½ mm (zufällig)
$\Delta u_A = \pm ½$ mm
→ Dehnung 5mm pro 1m (systematisch)
$\Delta u_{D\%} \approx +0{,}5\%$
→ Bandstärke ½ mm (systematisch)
da Außenmessung: Δd = 1mm → $\Delta u_B \approx +3$mm ($u \approx 3d$)

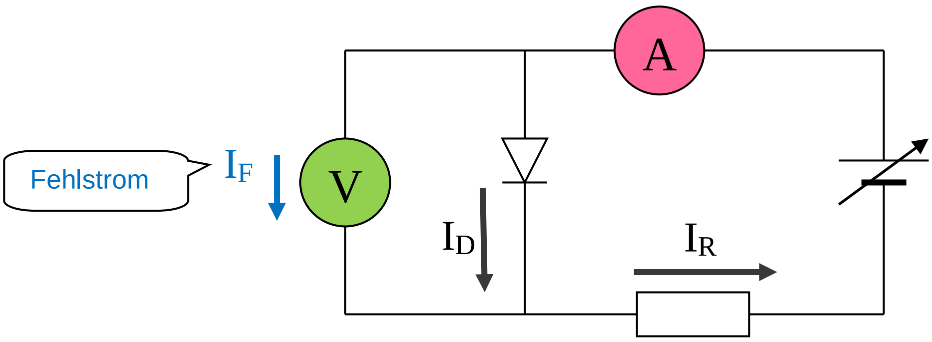
bekannt	**unbekannt**
Messwert: z.B. u = 632mm	Wahrer Wert: u ≈ 628,32mm
Größtfehler: Δu_g = +6,5mm / -1mm	Wahrer Fehler: ε = 3,68mm

Durch Mehrfachmessung lässt sich lediglich der zufällige Fehleranteil senken.
Der zufällige Ablesefehler ± ½ mm würde dann durch die Standardabweichung

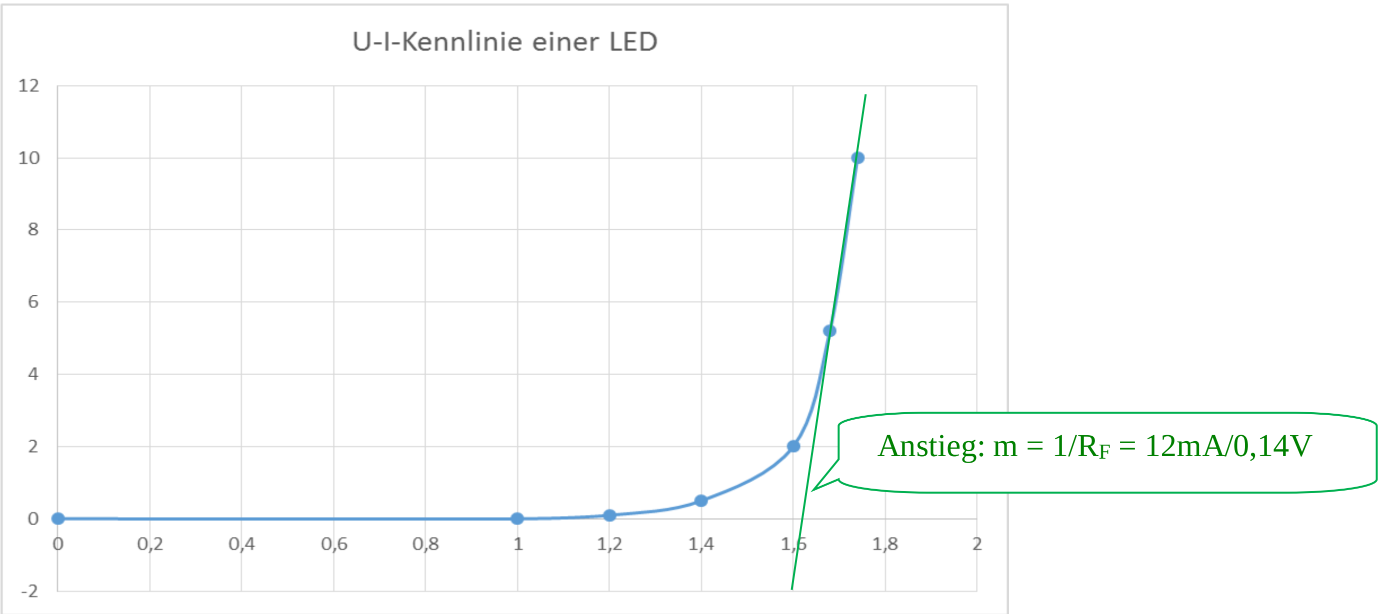
oder den Vertrauensbereich ersetzt $\pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Beispiel 2

Nehmen Sie eine U-I-Kennlinie einer Leuchtdiode auf und bestimmen Sie die Flussspannung.



U/V	0,00	1,00	1,20	1,40	1,60	1,68	1,7
I/mA	0,0	0,0	0,1	0,5	2,0	5,2	10,0



Untersuche den Fehler in der Nähe der Zielgröße U_F :

Voltmeter ELV: $R_i = 10\ M\Omega$
(digital) Messbereich (MB): 20V DC
Genauigkeit für gewählten MB: ± (0,5% vom Messwert + 3 Digit)
Messwert (MW): U = 1,68 V
Spannungsmessfehler: : $\Delta U = \pm (8{,}4 + 30)$ mV
Spannung: U = (1,68 ± 0,0384) V → 2,3%

Amperemeter METRAmax2: R_i – irrelevant, da <u>spannungsrichtige</u> Messung
(analog) Messbereich: 10 mA DC (Skalenteilung 0,2mA/SKT)
Genauigkeitsklasse für gewählten MB: ± 2% vom Endwert

Messwert: U = 5,2 mA

Ablesesefehler (zufällig)

Strommessfehler: : $\Delta I = \pm 0{,}104$ mA ± ½ SKT ± ½ SKT – 1,68V/10MΩ

Eichfehler Skale (systematisch)

Stromstärke: I = (5,2 + ± 0,304 – 0,168 10^{-3}) mA
Stromstärke: I ≈ (5,2 ± 0,304) mA
Auswirkung auf Zielgröße: $\Delta U = R_F \cdot \Delta I = \pm 11{,}7\Omega \cdot 0{,}304$ mA = ± 3,6 mV
Flussspannung: U = (1,68 ± 0,0384 ± 0,0036) V = 1,68V ± 0,042V → 2,5%