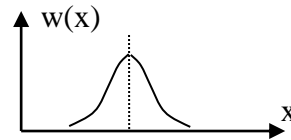


# Fehlerarten

1. Zufälliger Fehler – treten statistisch verteilt um einen Mittelwert auf  
 → Normalverteilung



Beispiele: **Ableseunsicherheit  $\pm \frac{1}{2}$  Skt.**  
**Erschütterungen**  
**Lagerkräfte (nur bei mech. Messgeräten)**

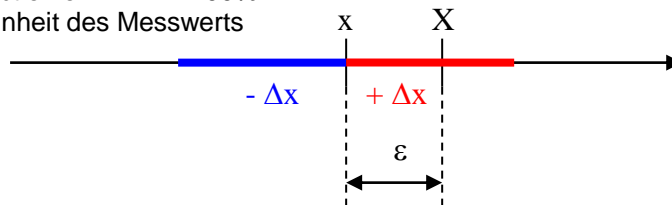
2. Systematische Fehler - treten unter gleichen Bedingungen mit gleichem Betrag und Vorzeichen auf  
 - sind die Bedingungen bekannt, kann man diese Fehler aus den Messwerten herausrechnen.

Beispiele: **Reibungsfehler**  
**Innenwiderstandsfehler**  
**Eichfehler der Messgeräte  $\pm \frac{1}{2}$  Skt.**

# Fehlerangabe

1. Wahrer Fehler  $\varepsilon$  - Abweichung des Messwertes  $x$  vom wahren Wert  $X$ :  $\varepsilon = x - X$   
 - meist unbekannt, da der wahre Wert  $X$  unbekannt ist

2. Absoluter Fehler  $\Delta x$  - Intervall um Messwert  $x$ , welches den wahren Wert  $X$  mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit  $P$  enthält:  $X = x \pm \Delta x$   
 - wenn  $\Delta x$  Größtfehler  $\rightarrow P = 100\%$   
 - besitzt die Einheit des Messwerts



3. Messunsicherheit  $\Delta x_g$ : - auch Größtfehler  $\Delta x_g = \sum |\Delta x_{\text{sys}}| + \sum |\Delta x_{\text{zuf}}|$

3. Relativer Fehler - Verhältnis aus Absolutfehler  $\Delta x$  und wahren Wert  $X$   
 - da  $X$  meist nicht bekannt:  $\frac{\Delta x}{X} \approx \frac{\Delta x}{x}$  (für kleine  $\varepsilon$ )  
 - einheitenlos

4. Prozentualer Fehler - Angabe des Relativfehlers in Prozent:  $\frac{\Delta x}{x} 100\%$   
 - für Vergleiche am besten geeignet

# Fehlerfortpflanzung

1. Bei Fehlern von Summen und Differenzen werden die Beträge der absoluten Fehler addiert:

$$f = ax + by - z \quad \rightarrow \quad \Delta f = |a|\Delta x + |b|\Delta y + \Delta z$$

2. Bei Fehlern von Produkten und Quotienten werden die Beträge der relativen Fehler addiert:

$$f = a \frac{x y}{z} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

3. Bei Fehlern von Potenzen wird der relative Fehler mit dem Betrag des Exponenten multipliziert:

$$f = a \frac{x^n}{y^m} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f} = |n| \frac{\Delta x}{x} + |m| \frac{\Delta y}{y}$$

4. Fehler allgemein (totales Differential):  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$

## Zufälliger Fehler in Messreihen

1. Arithmetischer Mittelwert:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

2. Standardabweichung  $\sigma_{n-1}$ : - mittlerer Fehler der Einzelmessung  
 - **Stichprobenstandardabweichung**  
 - empirische Standardabweichung  
 - auch  $s_x$  oder  $s$

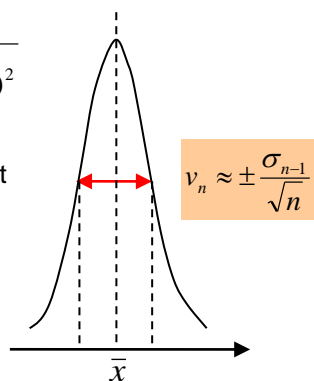
$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Standardabweichung  $\sigma_n$ : - alle Elemente einer endlichen Grundgesamtheit werden erfasst  
 - **Populationsstandardabweichung**  
 - auch  $\sigma_x$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

4. Vertrauensbereich  $v_n$ : - enthält den wahren Wert mit einer statistischen Sicherheit von 68,3%  
 - Wendepunktstand

$$n > 10: X \approx \bar{x} \pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

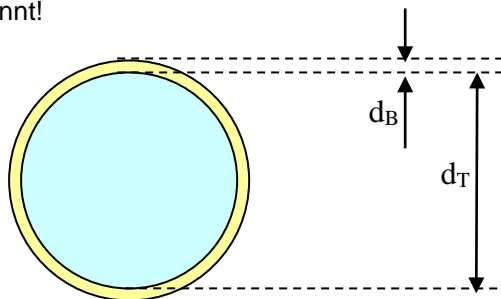


5. Streubreite R: - Variationsbreite  $R = x_{max} - x_{min}$

## Beispiel 1

Messen des Umfang eines Topfes mit 200,00mm Durchmesser (Herstellerangabe) durch Einfachmessung -  $\pi$  ist noch nicht bekannt!  
 Messgerät - Textilbandmaß mit mm-Teilung

- Eichfehler  $\pm \frac{1}{2}$  mm (systematisch)  
 $\Delta u_E = \pm \frac{1}{2}$  mm
- Ablesefehler  $\pm \frac{1}{2}$  mm (zufällig)  
 $\Delta u_A = \pm \frac{1}{2}$  mm
- Dehnung 5mm pro 1m (systematisch)  
 $\Delta u_{D\%} \approx +0,5\% \rightarrow \Delta u_D = +1$  mm
- Bandstärke  $d_B = \frac{1}{2}$  mm (systematisch)  
 da Außenmessung:  $\Delta d = 1$  mm  $\rightarrow \Delta u_B \approx +3$  mm ( $u \approx 3d$ )



bekannt

unbekannt

Messwert: z.B.  $u = 632$  mm

Wahrer Wert:  $u \approx 628,32$  mm

Größtfehler:  $\Delta u_g = +5$  mm /  $+4$  mm

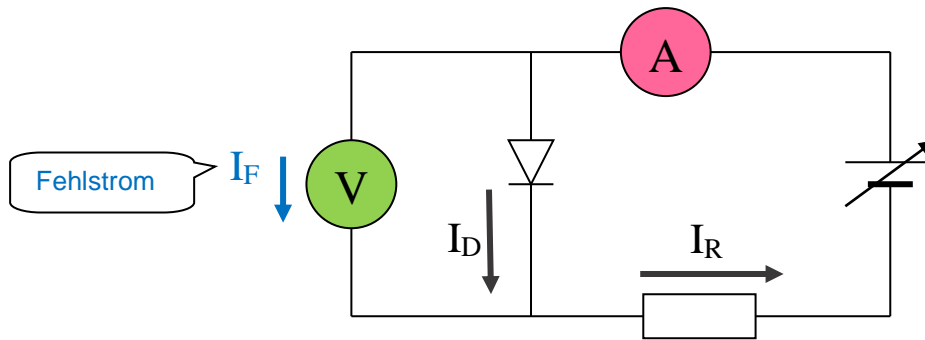
Wahrer Fehler:  $\varepsilon = 3,68$  mm

Durch Mehrfachmessung lässt sich lediglich der zufällige Fehleranteil senken.  
 Der zufällige Ablesefehler  $\pm \frac{1}{2}$  mm würde dann durch die Standardabweichung

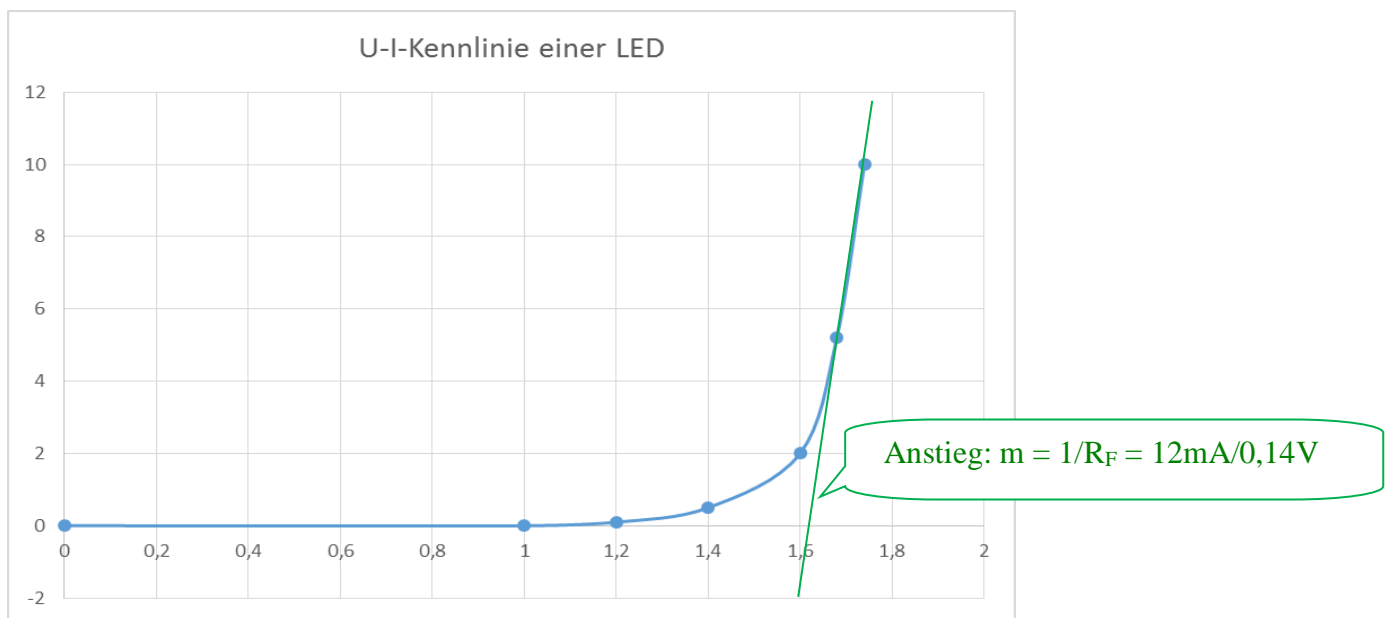
oder den Vertrauensbereich ersetzt  $\pm \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$ .

# Beispiel 2

Nehmen Sie eine U-I-Kennlinie einer Leuchtdiode auf und bestimmen Sie die Flussspannung.



U/V	0,00	1,00	1,20	1,40	1,60	1,68	1,7
I/mA	0,0	0,0	0,1	0,5	2,0	5,2	10,0



Untersuche den Fehler in der Nähe der Zielgröße  $U_F$  :

**Voltmeter ELV:**  $R_i = 10 \text{ M}\Omega$

(digital)

Messbereich (MB): 20V DC

Genauigkeit für gewählten MB:  $\pm (0,5\% \text{ vom Messwert} + 3 \text{ Digit})$

Messwert (MW):  $U = 1,68 \text{ V}$

Spannungsmessfehler:  $\Delta U = \pm (8,4 + 30) \text{ mV}$

**Spannung:  $U = (1,68 \pm 0,0384) \text{ V} \rightarrow 2,3\%$**

**Amperemeter METRAMax2:**

(analog)

$R_i$  – irrelevant, da spannungsrichtige Messung

Messbereich: 10 mA DC (Skalenteilung 0,2mA/SKT)

Genauigkeitsklasse für gewählten MB:  $\pm 2\%$  vom Endwert

Messwert:  $I = 5,2 \text{ mA}$

Ablesefehler (zufällig)

Strommessfehler:  $\Delta I = \pm 0,104 \text{ mA} \pm \frac{1}{2} \text{ SKT} \pm \frac{1}{2} \text{ SKT} - 1,68\text{V}/10\text{M}\Omega$

Eichfehler Skale (systematisch)

Stromstärke:  $I = (5,2 \pm 0,304 - 0,168 \cdot 10^{-3}) \text{ mA}$

**Stromstärke:  $I \approx (5,2 \pm 0,304) \text{ mA}$**

Auswirkung auf Zielgröße:  $\Delta U = R_F \cdot \Delta I = \pm 11,7\Omega \cdot 0,304 \text{ mA} = \pm 3,6 \text{ mV}$

**Flussspannung:  $U = (1,68 \pm 0,0384 \pm 0,0036) \text{ V} = 1,68\text{V} \pm 0,042\text{V} \rightarrow 2,5\%$**