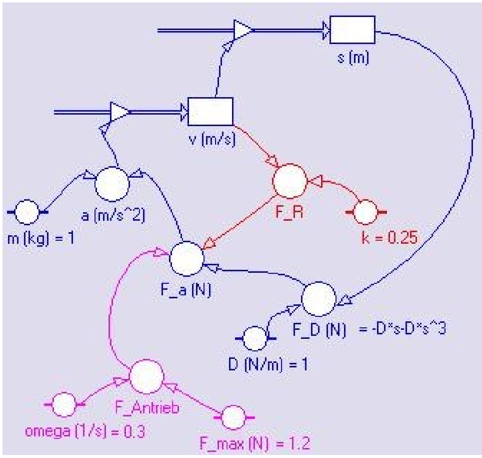
WOU Mathematik Klasse 10 „Modellbildung“

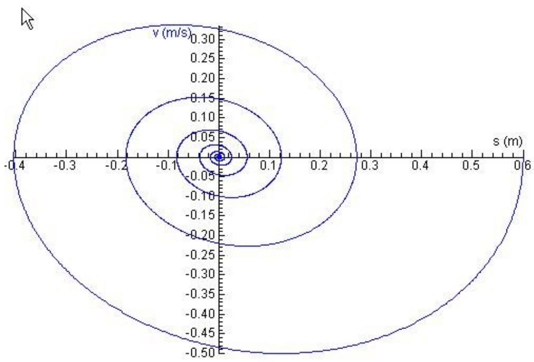
1.	Welche Vorteile bietet die Modellierung komplexen Systemen? Geben Sie jeweils ein Beispiel an!	
	- Simulation nicht-idealisierter Vorgänge mit hohem Datendurchsatz *z.B. Fallschirmspringer, unelastischer Stoß* - Näherungslösungen für nicht elementar-mathematisch lösbare *Differenzialgleichungen z.B. Dreikörperproblem (Satz Poincaré)* - Untersuchung von Endzuständen nicht-linear rückgekoppelter Systeme *z.B. Resonanz oder Chaosfenster bei Schwingungssystemen wie Hochhäusern und Brücken*	
2.	Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem numerischen Integrationsverfahren nach EULER-CAUCHY und RUNGE-KUTTA am Beispiel der Kinematik.	
	EULER-C.: $v_{n+1} = v_n + a_n * \Delta t$ $s_{n+1} = s_n + v_n * \Delta t$ $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ $a_{n+1} = f(s_{n+1})$ Ungenaueres einzügiges Verfahren Zustandsänderung ist in Δt konstant Rückkopplung: $a_{n+1} = f(s_n)$ RUNGE-K.: $v_{1/2} = v_n + a_n * \Delta t/2$ $s_{1/2} = s_n + v_{1/2} * \Delta t/2$ $a_{1/2} = f(s_{1/2})$ $v_{n+1} = v_n + a_{1/2} * \Delta t$ $s_{n+1} = s_n + v_{n+1} * \Delta t$ $a_{n+1} = f(s_{n+1})$ $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ genaueres Stützstellen-Verfahren Zustandsänderung ist in Δt gewichtet Rückkopplung nach Halbschritt	
3.	Was versteht man unter einem Fixpunkt, Attraktor, seltsamen Attraktor, Periode N, Phasenraum, Feigenbaumdiagramm, Feigenbaumpunkt, Bifurkation, Zustandsgröße. und Flussgröße.	
	Fixpunkt: Endzustand des Systems – Grenzwert der zeitlichen Entwicklung Attraktor: mehr oder weniger komplexer Grenzzyklus (Endzustand) Merke: Attraktoren sind Fixpunkte der höheren Iterrierten Seltsam heißt ein Attraktor, wenn er nur einen Häufungsbereich im Phasenraum markiert ohne streng zyklisches Verhalten zu zeigen Periode N: gibt Anzahl der Rekursionsschritte an, die erforderlich sind, um den Grenzzyklus eines Attraktors zu wiederholen. Phasenraumdiagramm: Zeitfreie Darstellung zweier rückgekoppelter Zustandsgrößen Feigenbaumdiagramm: graph. Darstellung eines Endzustandswert einer Zustands-variable x gegen sensitiven Parameter a (Langzeitverhalten) Feigenbaumpunkt: Grenzwert eines sensitiven Parameters a für den das System aus dem Bereich der Periodenverdopplung ins Chaos übergeht. Bifurkation: Verzweigung im Feigenbaumdiagramms Zustandsgröße: jede abhängige Variable die den Momentanzustand eines zeitlich veränderlichen Systems charakterisiert Flussgröße ϕ: zeitliche Zuwachsgröße einer Zustandsgröße $x_{n+1} = x_n + \phi * \Delta t$	
4.	Geben Sie an, welche Phasenraumdarstellungen, Zeitdiagramme und Struktogramme, zu welchem System gehören: a) gedämpfte Schwingung b) ungedämpfte Schwingung c) gedämpfte Schwingung mit Antrieb	

a) a)

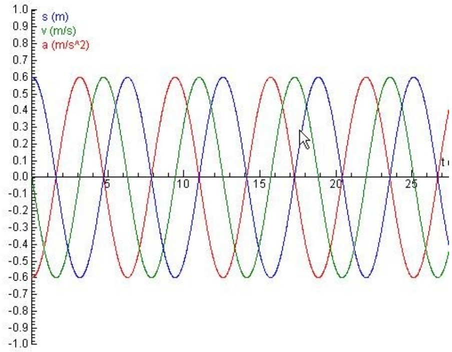
c)



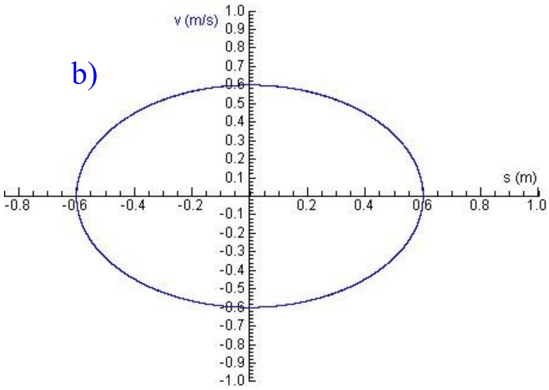
a)



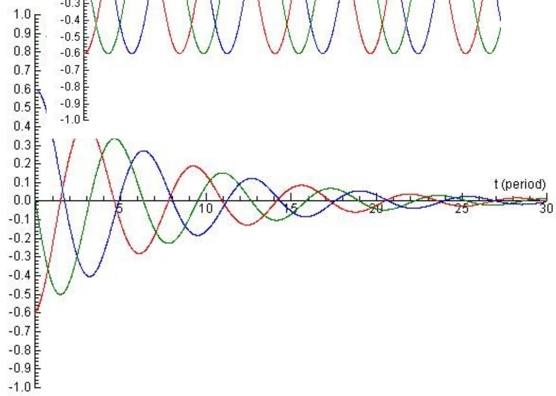
b)



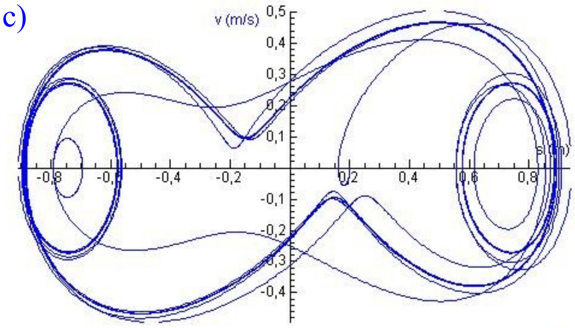
b)



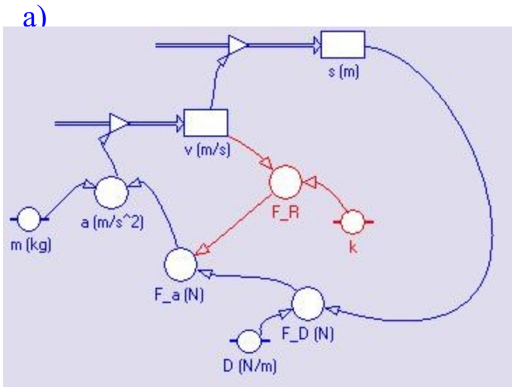
a)



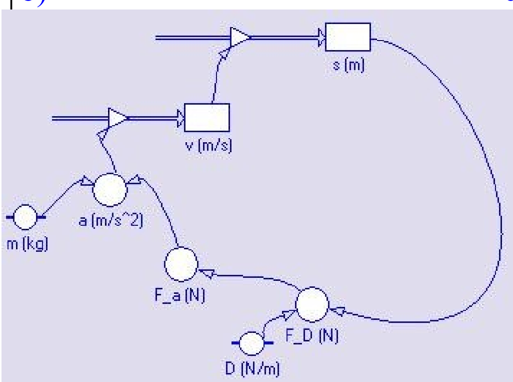
c)



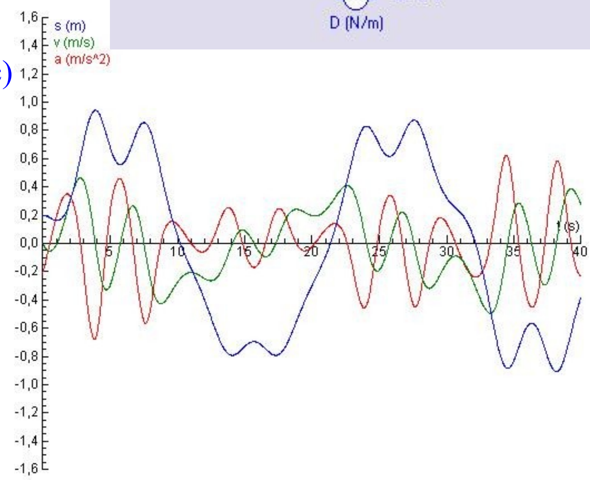
a)



b)



c)

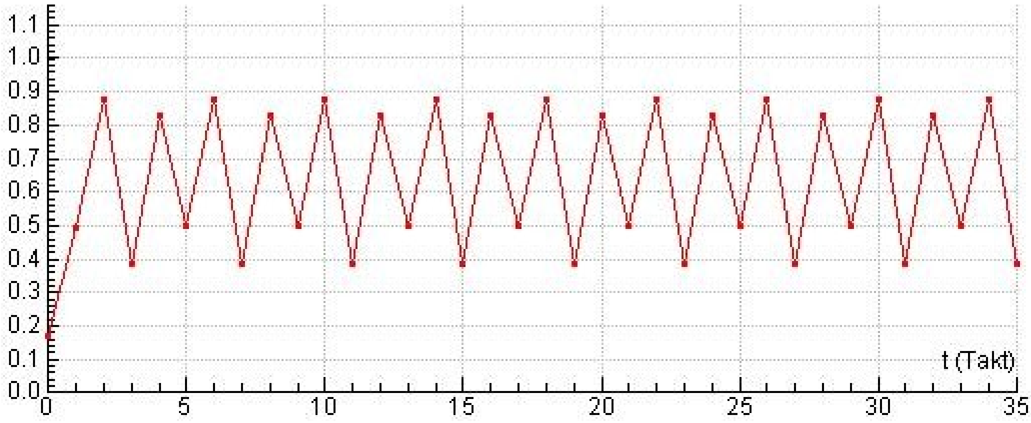


5. Nennen Sie Voraussetzungen für das Entstehen von Chaos.

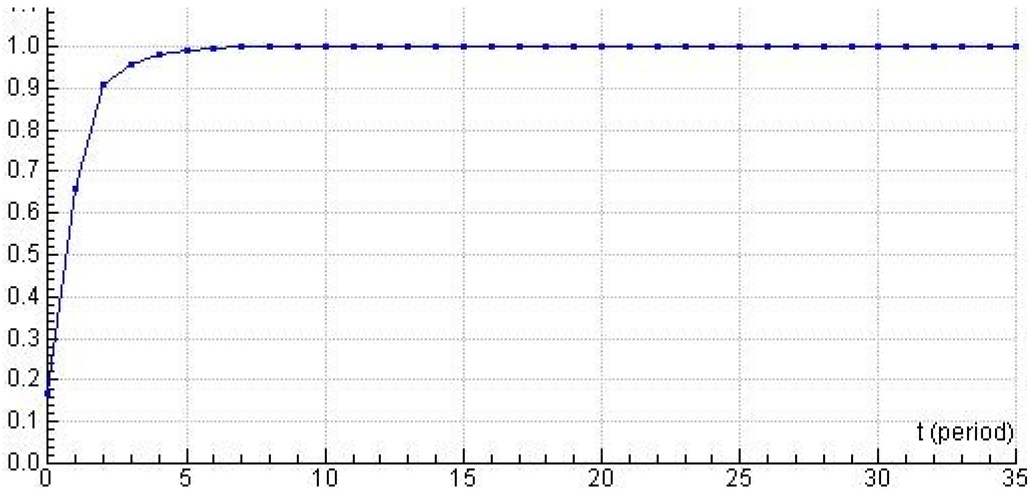
Dämpfung, nichtlineare Rückkopplung, Anregung, Energiedissipation ($E_{pot} \rightarrow E_{therm}$), diskrete Rückkopplung (Faltung, Rekursion)

6. Zeichnen Sie das p-t-Diagramm der relativen Populationsstärke p für eine stetige Entwicklung und für eine mögliche diskrete Entwicklung der Population.

Diskrete Entwicklung



Stetige Entwicklung



7. Beschreiben Sie das System „TT-Ball auf Lautsprechermembran“. Gehen Sie auf die Form der Rückkopplung, der Art Dämpfung, den Anregungsmechanismus und die Art der Bewegungsgleichungen ein.

Die Bewegung des Balles nach Reflexion folgt den Gleichungen des senkrechten Wurfes und liefert eine Parabel: $y = v't - g/2\ t^2$. Dabei entspricht die Zeit t der veränderlichen Flugzeit für eine Sprungperiode.
Die Dämpfung erfolgt durch Reibung zum Zeitpunkt der Reflexion und wird durch die Stoßzahl ausgedrückte: $e = v'/v < 1$
Die Anregung erfolgt durch die sich harmonisch bewegende Lautsprechermembran. Zum Zeitpunkt der Reflexion wird dem Ball Bewegungsenergie entzogen oder zugeführt je nach Phasenlage, mit der der Ball die Membran trifft:
Fall 1: $v_{Ball} \downarrow\uparrow v_{Memb} \rightarrow v'_{Ball} = -(v_{Ball} + v_{Memb})$
Fall 2: $v_{Ball} \downarrow\downarrow v_{Memb} \rightarrow v'_{Ball} = -(v_{Ball} - v_{Memb})$
Die Rückkopplung bzw. Rekursion ist durch Reflexion gegeben, dadurch wird die Variable v_{Ball} in einem <u>diskreten</u> Prozess (teilelast. Stoß) neu definiert.
Durch die zeitabhängige Sprunghöhe ist die Rückkopplung nicht linear.