POPULATIONSDYNAMIK

Motivation: "Massenselbstmord" der Lemminge

Populationsbegrenzung bei fehlenden äußeren Feinden

DIE VERHULSTGLEICHUNG

Der belgische Mathematiker Pierre François Verhulst entwickelte 1845 ein math. Entwicklungsmodell für Tierpopulationen.

WACHSTUMSRATE $\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$

RELATIVE POPULATIONSSTÄRKE $P_n = \frac{m}{M}$

m: aktuelle Möwenanzahl

M: max. mögliche Möwenanzahl

M wird z.B. durch Nahrungsangebot bestimmt!

Annahme: $\boxed{\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \sim (1 - P_n)} = \frac{\Delta m}{M}$ – Populationsreserve

Wegen Futterkonkurrenz sinkt die Wachstumsrate entsprechend, wenn die Population sich ihrer Maximalstärke nähert!

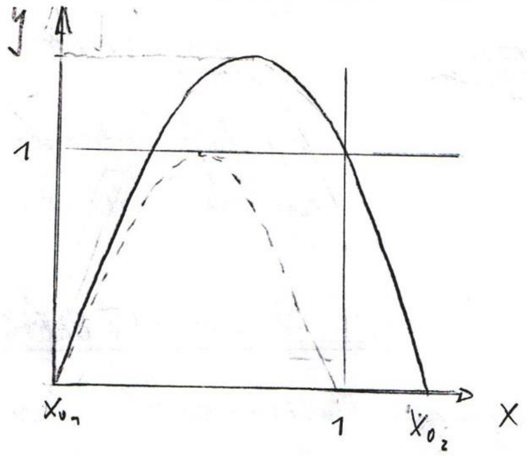
$$\longrightarrow \quad P_{n+1} - P_n = r \cdot P_n (1 - P_n)$$

r: Vermehrungsfaktor $0 \leq r \leq 3$

Differentielle Schreibweise: $\boxed{\dot{p} = r\, p(1 - p)}$

Iterative Schreibweise: $\boxed{P_{n+1} = P_n + r P_n (1 - P_n)}$

Iterationsfunktion: $y = x + rx(1-x)$
$= \underline{(1+r)x - rx^2}$



NST: $x_{0_1} = 0$; $x_{0_2} = \frac{1+r}{r}$

MAX: $y_{max} = \frac{(1+r)^2}{4r}$

(wie man leicht findet)

Normierung: $x_{0_2} \to 1$

Faktor: $\frac{r}{1+r}$

$$y = (1+r)x - rx^2 \quad \Big| \cdot \frac{r}{r+1}$$

$$y \cdot \frac{r}{r+1} = (1+r) \cdot x \cdot \frac{r}{r+1} - r \cdot x^2 \frac{r}{r+1}$$

y' $\qquad x'$

$$\sim \qquad \sim \qquad -(r+1)\, x^2 \frac{r^2}{(r+1)^2}$$

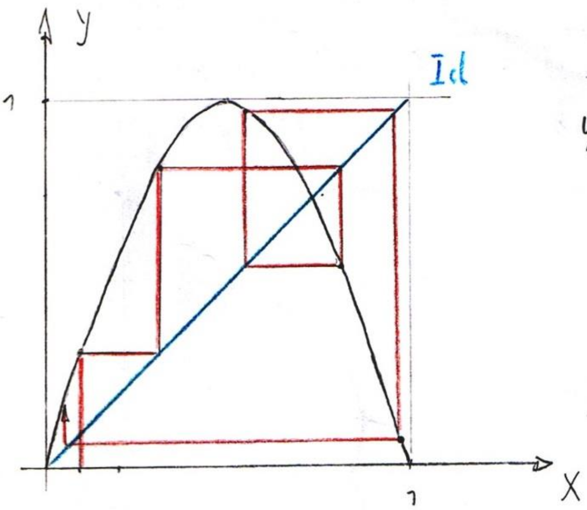
x'^2

$$y' = (1+r)\, x' - (r+1)\, x'^2$$

Setze $r+1 = a$: $\boxed{y' = a x'(1-x')}$ $\quad 0 \leq a \leq 4$

DIE VERHULST-GLEICHUNG LÄSST SICH ALSO AUF EINE FUNKTION DES TYPS $y = ax(1-x)$ ZURÜCKFÜHREN.
FÜR $0 \leq a \leq 4$ FÜHRT DIE FUNKTION NICHT AUS DEM DEF.BEREICH HERAUS, SONDERN WIRD AUF IHN ZURÜCKGEFALTET.
DER DEF. BEREICH (WERTEBEREICH) IST EINE ZUSAMMENHÄNGENDE GEFANGENENMENGE: $0 \leq x; y \leq 1$

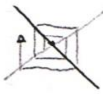
DIE ITERATIONSFUNKTION $y = ax(1-x)$



Bsp.:

$y = 4x(1-x)$

Eigenschaften:

EXPANSION $|m| > 1$
→ Auswärtstreppe $(m > 0)$ 
→ Auswärtsweb $(m < 0)$ 

KOMPRESSION $|m| < 1$
→ Einwärtstreppe $(m > 0)$ 
→ Einwärtsweb $(m < 0)$ 

Bei nicht-linearen Funktionen können die Funktionswerte während der Iteration von Expansions- in Kompressionsgebiete wechseln und umgekehrt.

Ändert sich das VZ des Anstiegs, dann werden die Funktionswerte in den Definitionsbereich teilweise oder vollst. zurückgefaltet (↗ Gefangenenmenge).

An $y = ax(1-x)$ wurden folgende Eigenschaften beobachtet:

Attraktiver Fixpkt. $x_{AF} = 0{,}643$ f. $a = 2{,}8$ $\forall x \in Db$.
Repulsiver Fixpkt. $x_{RF} = 0$ f. $a = 2{,}8$
Periode 2 $\boxed{0{,}513 / 0{,}8}$ f. $a = 3{,}2$ $\forall x \in Db$.
Periode 4 f. $a = 3{,}5$ $\forall x \in Db$
Periode 8 f. $a = 3{,}56$ $\forall x \in Db$
Chaos f. $a = 4$ $\forall x \in Db$
Periode 3 f. $a = 3{,}83$ $\forall x \in Db$

MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG DES FEIGENBAUM-SZENARIOS

FIXPUNKTBERECHNUNG: Fixpunkte erzeugen sich selbst bei Anwendung d. Iterationsfunktion:

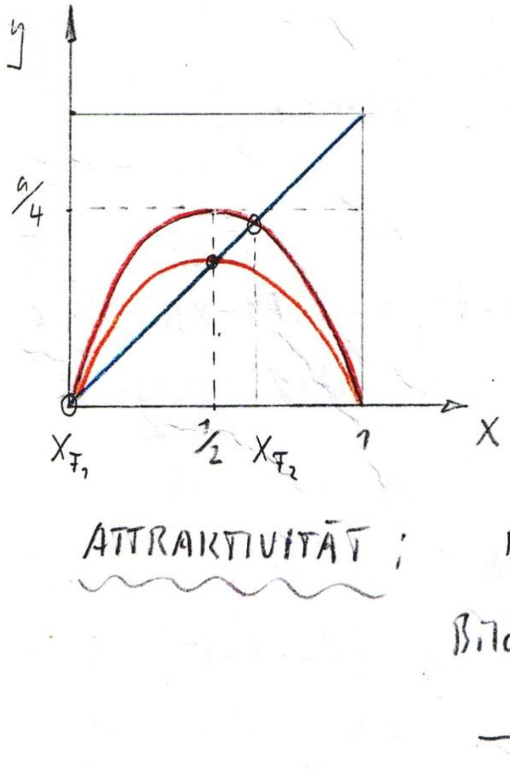
d.h. $X_F = a X_F (1 - X_F)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{1. Lösung:} & X_{F_1} = 0 \\ \text{2. Lösung:} & X_{F_2} = \frac{a-1}{a} \end{array}}$$

$0 < a < 1$: $X_{F_1} = 0$ 2 Lsg. liegt nicht im Def.b. $X_{F_2} < 0$!

$a = 1$: $X_F = 0$ genau eine Lösung!

$1 < a \leq 4$: $X_{F_1} = 0 \wedge X_{F_2} = \frac{a-1}{a}$



SCHEITELPUNKTBERECHNUNG:

$y' = a - 2aX_s = 0$ (MAX)

$X_s = \frac{1}{2}$ $y_s = \frac{a}{4}$

ATTRAKTIVITÄT: Bedingung $|m| \leq 1$ an X_F

Bilde: $y' = a - 2aX_F = a(1 - 2X_F)$

$\longrightarrow |a(1 - 2X_F)| \leq 1$

$X_{F_1} = 0$: $a \leq 1$ attraktiv $\forall x$

$a > 1$ repulsiv $\forall x$

— SUPERATTRAKTIVER FALL $a = 2 \longrightarrow m = 0$ (extrem konvergent)

$x_{F_2} = \frac{a-1}{a}$: $\left| a \left\{ 1 - 2\left(\frac{a-1}{a} \right) \right\} \right| \le 1$

$\left(x_{F_s} = 0{,}5 \right)$

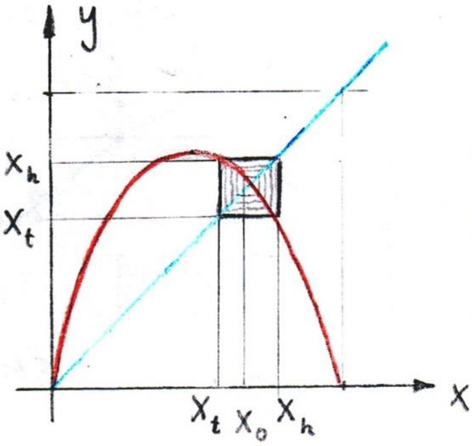
$$|2-a| \le 1$$

f. $1 \le a \le 3$ attraktiv $\forall x$

f. $a > 3$ repulsiv $\forall x$

PERIODE 2 :

(1. Bifurkation)



Alle Startwerte x_0 des Def.bereichs streben alternierend gegen x_h u. x_t

▷ X_p GEHÖRT ZUR PERIODE N g.d.w. X_p SICH IN DER N-TEN ITERIERTEN SELBST ERZEUGT.
D.H. X_p IST FIXPUNKT DER N-TEN ITERIERTEN.

Bilde 2. Iterierte:

$$x_p = f(f(x_p))$$

$$x_p = a^2 x(1-x)\left(1-ax(1-x)\right) \quad | -x$$

$$0 = -a^3x^4 + 2a^3x^3 - (a^2+a^3)x^2 + (a^2-1)x$$

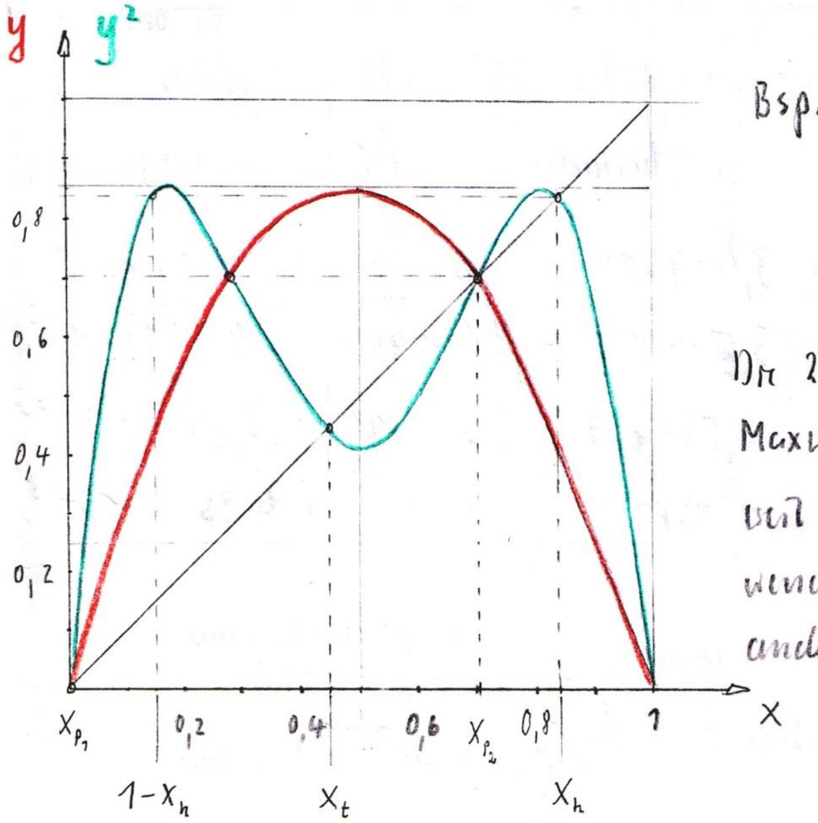
Fixpunkte d. 1. Iterierten sind logischerweise auch Lösungen d. 2. Iterierten, weil sich Fixpunkte immer wieder selbst erzeugen : $x_{p_1} = 0$ $\quad x_{p_2} = \frac{a-1}{a}$

Nach Division durch $x-x_{p_1}$ u. $x-x_{p_2}$:

$$0 = -a^3x^2 - (a^2+a^3)x - (a^2+a) \quad | : -a^3$$

$$0 = x^2 - \frac{a+1}{a}x + \frac{a+1}{a^2}$$

Man findet $\boxed{\begin{aligned} X_{P_3} &= X_h = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \\ X_{P_4} &= X_t = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \end{aligned}}$



Bsp.: $a = 3{,}40$ $\quad X_{P_1} = 0$

$X_h = 0{,}842$ $\quad X_{P_2} = 0{,}706$

$X_t = 0{,}452$

$y_{MAX} = 0{,}85$

Die 2. Iterierte hat den gleichen Maxwert y^2_{MAX} wie die 1. Iterierte, weil die gleiche Funktion angewendet wird bloß auf einen anderen Startwert!

$y^2_{MAX} = 0{,}85$

Eine exakte Kurvendiskussion liefert die restlichen Scheitelpunktkoordinaten – bei den vorhandenen Stützstellen nicht unbedingt erforderlich!

FALLUNTERSCHEIDUNG:

$a < 3 : \sqrt{\sim} < 0 : X_{h/t} = \text{n. def.}$

$a = 3 : \sqrt{\sim} = 0 : X_{P_2} = X_h = X_t$

$a > 3 : \sqrt{\sim} > 0 : X_t < X_{P_2} < X_h$

2-er Periode f. $a > 3$ ist stabil (attraktiv) s.d.v.

$|m| \leq 1$ d.h. $|y^{2\prime}| \leq 1$

$$|4a^3X^3 + 6a^3X^2 - 2(a^2+a^3)X + (a^2-1)| \leq 1$$

mit $X = X_h$ bzw. $X = X_t$ folgt $\boxed{a \leq 3{,}45}$

SUPERATTRAKTIVITÄT DER PERIODE 2: $a = 1+\sqrt{5} \rightarrow m = 0$

für $\boxed{a \geq 3{,}45}$ wird 2-er Periode repulsiv und es entsteht eine 4-er Periode; bei $\boxed{a \geq 3{,}544}$ eine 8-er Periode u.s.w.

BERECHNUNG DER FEIGENBAUMKONSTANTE (Okt. 1975)

Nenne die Bifurkationspunkte der n-ten Periode b_n

Bilde Differenz 2'er benachbarter Bifurkationspunkte

$$d_1 = b_2 - b_1 = 3{,}449489 - 3{,}0 = 4{,}4949 \cdot 10^{-1}$$
$$d_2 = b_3 - b_2 = 3{,}544090 - 3{,}449489 = 9{,}4611 \cdot 10^{-2}$$
$$d_3 = b_4 - b_3 = 3{,}564407 - 3{,}544090 = 2{,}0316 \cdot 10^{-2}$$
$$d_4 = b_5 - b_4 = 3{,}568759 - 3{,}564407 = 4{,}3521 \cdot 10^{-3}$$

u.s.w.

Bilde jetzt Quotient $d_1/d_2 = 4{,}7514$

$$d_2/d_3 = 4{,}6562$$
$$d_3/d_4 = 4{,}6682$$

Bilde $$\boxed{\lim_{n \to \infty} d_n/d_{n+1} = 4{,}6692016091029\ldots}$$

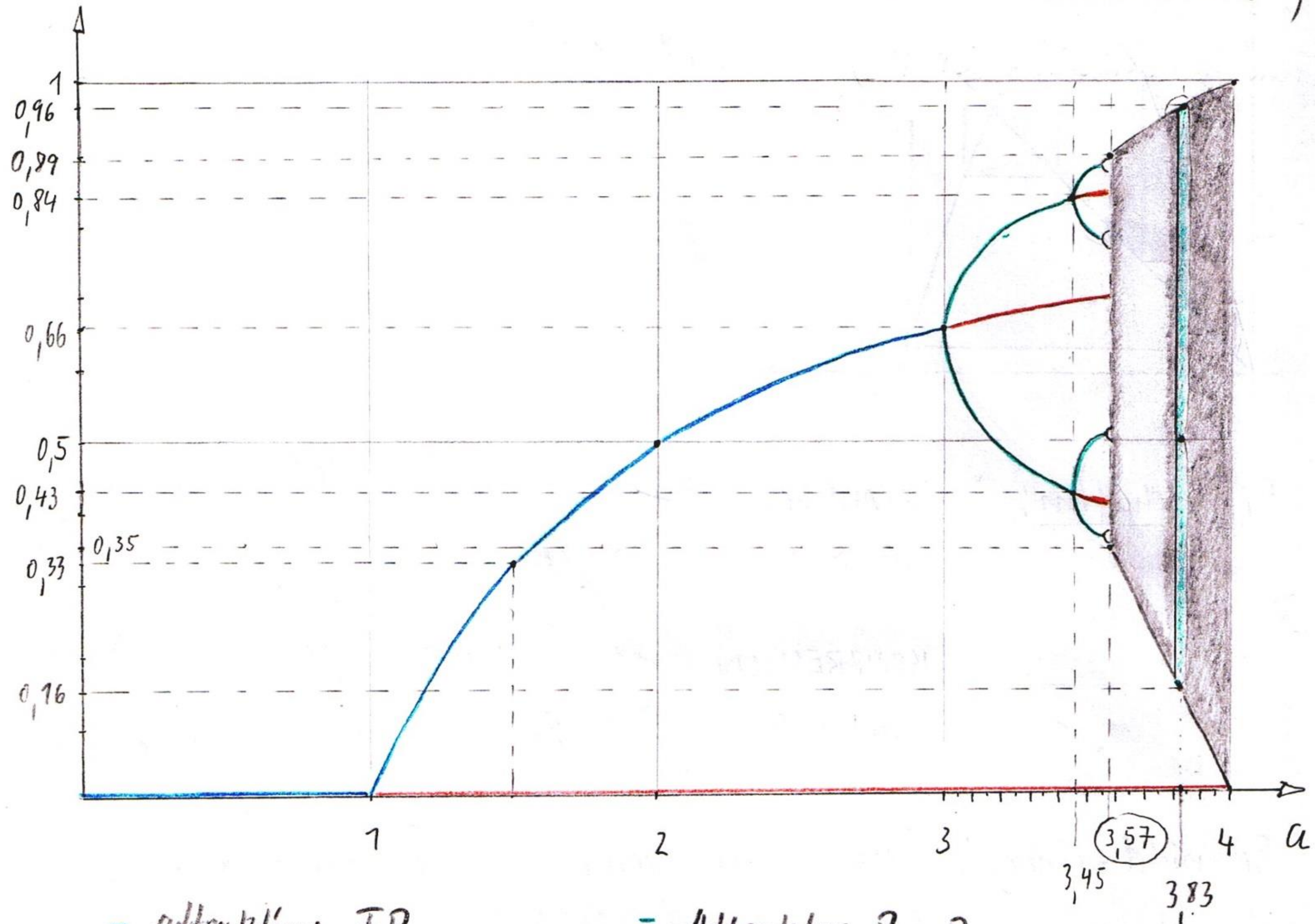
FEIGENBAUM berechnete die Konstante statt mit den Bifurkationspunkten mit den Argumenten f. Superstabilität

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n+1} - s_n} = \delta \text{ (konvergiert schneller)}$$

Die Feigenbaumkonst. ist UNIVERSELL und findet sich in allen Wissenschaftsbereichen

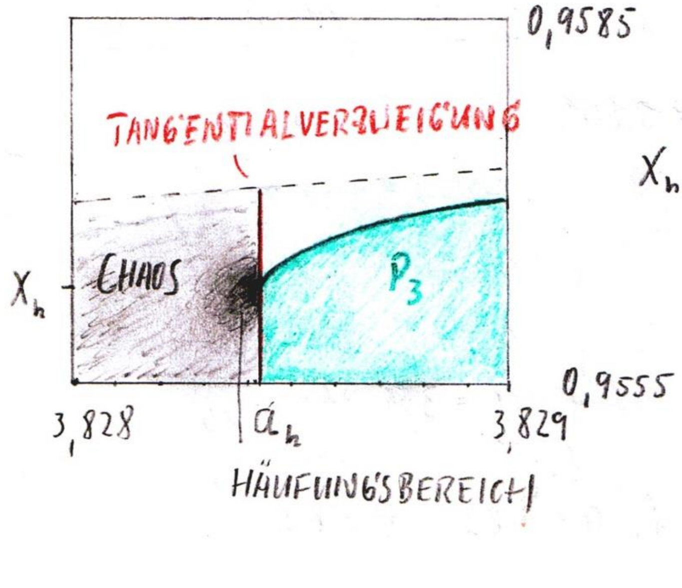
LANGZEITVERHALTEN IN ABH. VON a

→ FEIGENBAUMSZENARIO (MITCHELL FEIGENBAUM amerik. Mathematikers)



- attraktiver FP
- repulsiver FP
- Attraktor P_2; P_4; ....
- Repeller P_2
- Attraktor P_3 - Fenster

3,57 FEIGENBAUMPUNKT (exakt: 3,5699456...)

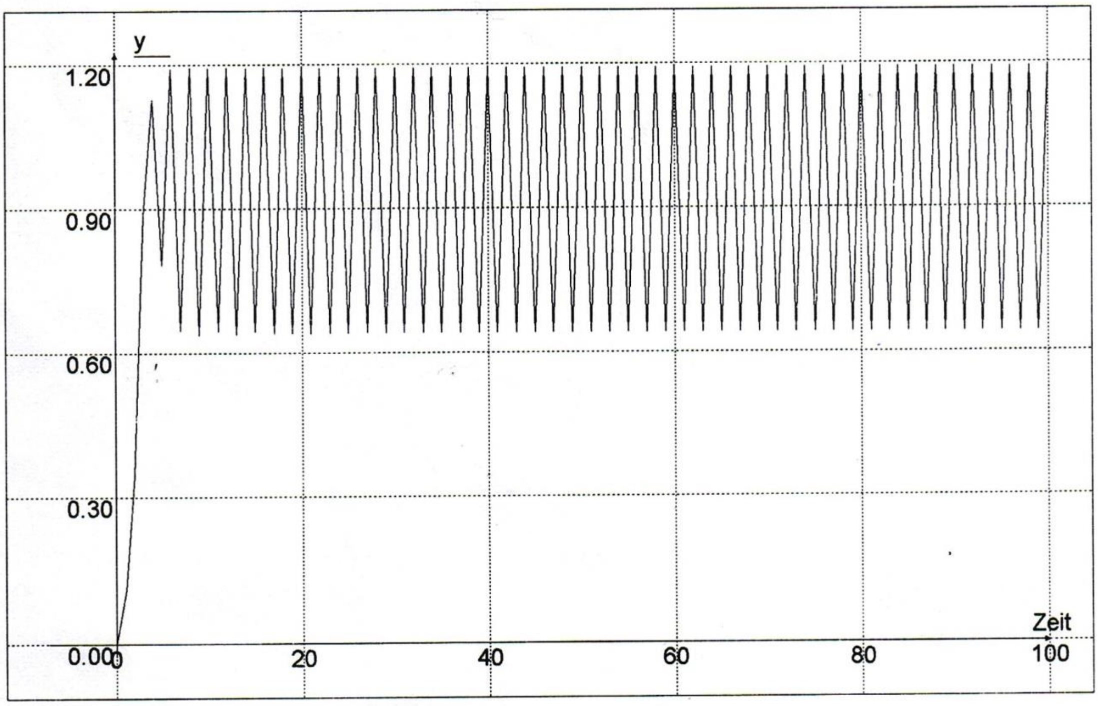


X_h - homokliner Punkt (trennt stabile u. labile Bereiche)

Pseudoperiodizität in d. Nähe d. Tangentialverzweigung heißt INTERMITTENZ (↗ Weg ins Chaos)

DYNASIS-SIMULATION DER VERHULST-DYNAMIK

Dynasys-Shareware-Version: Lassen Sie sich registrieren!



Zustandsgleichungen
    y.neu <-- y.alt + dt*(Pop)
      Startwert y = 0

Zustandsänderungen
    Pop = x

Konstanten
    y0 = 0.11
    r = 2.4

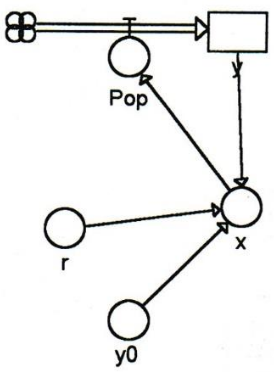
Zwischenwerte
    x = Wenn(y=0;y0;y*r*(1-y))

$dt = 1$

$$\boxed{y = y + ry(1-y)}$$

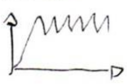
$0 \leq r \leq 3$

$0 \leq x; y \leq \frac{1+r}{r}$



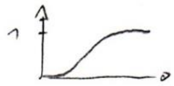
Berechnung mit:

Euler ≙ diskrete



Schrittweite

Runge-K. ≙ differentielle



Schrittweite